

# Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas

Luis Rico Romero  
Universidad de Granada

## **Resumen:**

Este trabajo presenta una interrelación del marco teórico de la evaluación PISA 2003 en matemáticas y resolución de problemas en términos curriculares. Se sostiene que la noción de competencia, hilo argumental del estudio, establece un planteamiento funcional de las matemáticas escolares. Esta articulación teórica tiene una lectura en términos de objetivos (competencias), contenidos (matemáticas escolares), metodología (matematización) y evaluación (tareas contextualizadas), cuya coherencia aquí se presenta y valora.

*Palabras clave:* marco teórico, PISA, matemáticas, resolución de problemas, noción de competencia.

**Abstract:** PISA theoretical framework on Mathematics and problem solving.

This paper introduces a theoretical frame's curricular interpretation on the mathematics and problem solving PISA 2003 assessment. We claim that the used notions of competence establish a functional approach to school mathematics. The theoretical framework has a curricular reading, based on aims (competences), subject (school mathematics), methodology (mathematisation) and assessment (contextualized tasks). We argue its coherence and value.

*Key words:* theoretical framework, PISA, mathematics, problem-solving, competence notion.

## INTRODUCCIÓN

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) contempla una serie de indicadores educativos entre las magnitudes económicas y de desarrollo que expresan el nivel de vida de una sociedad. Estos indicadores muestran la calidad del sistema educativo, entre otros, por medio del rendimiento de los escolares en una serie de disciplinas básicas, que comprenden los dominios de lectura comprensiva, competencia matemática y científica; esto se conoce como *alfabetización de los escolares*.

La calidad de la formación que proporciona un sistema educativo está relacionada con la relevancia de los fines formativos pretendidos, la eficacia en la consecución de logros y la eficiencia en la gestión de medios y recursos. La noción

de rendimiento en educación trata de establecer la satisfacción de las finalidades propuestas, de acuerdo con las disponibilidades de cada institución educativa.

Para llevar a cabo sus fines relativos al *crecimiento sostenible de la economía y del empleo, así como una progresión del nivel de vida en los países miembros*, la OCDE utiliza diversas estrategias, entre las que se encuentran recoger datos y promover estudios; resulta así factible publicar informes, analizar resultados y establecer previsiones para encauzar el crecimiento de los países miembros. Las estadísticas y datos ayudan a determinar indicadores, que sirven para cuantificar magnitudes con las que caracterizar y comparar el desarrollo de estos países.

Estos indicadores se refieren a magnitudes o porcentajes que marcan la capacidad y el desarrollo alcanzado en las sociedades modernas. Algunos indicadores sirven para expresar el bienestar de una sociedad; otros se refieren al nivel educativo y cultural de los países, base imprescindible de su desarrollo. Los indicadores expresan de manera cuantitativa relaciones que tienen significados precisos dentro de un marco conceptual previo.

Conocer en qué medida los jóvenes que finalizan la escolaridad obligatoria están preparados para la sociedad del siglo XXI y sus desafíos es un empeño de los países de la OCDE y un modo de evaluar la calidad de sus sistemas educativos (Rico, 2005a).

El *Programme for International Student Assessment (PISA)* se establece para contribuir al desarrollo de los países miembros de la OCDE y generar indicadores del capital en educación para una sociedad. Tal capital lo constituyen los conocimientos, destrezas, competencias y otros rasgos individuales de sus ciudadanos, que son relevantes para el bienestar personal, social y económico. La información procede de los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas de papel y lápiz que proporcionan los estudiantes de 15 años y que se llevan a cabo mediante una evaluación internacional.

La evaluación PISA pretende obtener información sobre el dominio de los ciudadanos de una comunidad cuando usan las herramientas matemáticas en situaciones de la vida cotidiana, como referente de la calidad de su sistema educativo. La evaluación PISA se sostiene sobre un marco teórico preciso, cuyas claves conviene conocer, para así interpretar correctamente los indicadores, datos y valoraciones derivados del estudio (Rico, 2004). Es propósito de este trabajo explicitar el marco teórico que sustenta la evaluación PISA sobre matemáticas y resolución de problemas para contribuir a ese conocimiento.

## ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA

El dominio que se evalúa en el proyecto OCDE/PISA se denomina *alfabetización matemática (Mathematical Literacy)*. Dicha alfabetización o competencia matemática general se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Un buen nivel en el desempeño de estas capacidades muestra que un estudiante está matemáticamente alfabetizado o letrado. Reducir la noción de alfabetización a sus aspectos instrumentales más básicos, al simple dominio de conceptos y técnicas, puede resultar excesivamente elemental. El estudio PISA tiene, por el contrario, una interpretación comprensiva: debe mostrar la capacidad de los estudiantes para enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas. Atreverse a pensar con ideas matemáticas es la descripción actualizada de un ciudadano matemáticamente ilustrado.

En sus relaciones con el mundo natural y social, y en su vida cotidiana, los ciudadanos se enfrentan regularmente a situaciones en las que usan el razonamiento cuantitativo o espacial u otras nociones matemáticas que ayudan a clarificar, formular y resolver problemas.

Los ciudadanos de todos los países están implicados en multitud de tareas que incluyen conceptos cuantitativos, espaciales, funcionales, relacionales u otros. La competencia matemática del OCDE/PISA se ocupa del modo en que los estudiantes de 15 años actúan como ciudadanos informados, reflexivos y consumidores inteligentes. Se centra en su capacidad para leer formularios, pagar facturas, no ser engañados en tratos que impliquen dinero, determinar la mejor compra en el mercado, y muchos otros.

Para el estudio OCDE/PISA *alfabetización matemática* es:

La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2003).

La posición natural, cultural y social en la que viven los individuos se expresa con el término «el mundo». «Usar e implicarse con las matemáticas» significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también *comunicar, relacionarse con, valorar* e incluso, *apreciar y disfrutar* con las matemáticas. Las matemáticas no se reducen a sus aspectos técnicos sino que están inmersas en el mundo social, impregnadas de sentido práctico, comprometidas con los valores de equidad, objetividad y rigor, pero también con la creatividad, el ingenio y la belleza. Todas estas facetas se contemplan en el uso de las matemáticas y en la implicación que con ellas tienen las personas. Por «vida individual» se entiende la vida privada, la vida profesional, la vida social con compañeros y familiares, así como a la vida de los estudiantes como ciudadanos de una comunidad (OCDE, 2004a).

## MARCO CURRICULAR

La evaluación PISA se orienta a valorar el rendimiento acumulado de los sistemas educativos y pone se centra, como se ha dicho, en la alfabetización o formación básica en los dominios cognitivos de la lectura, las matemáticas y las ciencias. La evaluación proporciona indicadores sobre la alfabetización de los escolares, no en términos de un currículum escolar convencional, sino sobre los conocimientos y destrezas necesarios para la vida adulta.

Este estudio se lleva a cabo mediante la evaluación de la competencia de los escolares al término de la educación obligatoria. Cada tres años se obtienen los datos que determinan indicadores de dicha competencia. En cada aplicación se evalúan las tres áreas, pero se pone mayor énfasis en una de ellas. La evaluación de competencias transversales se contempla mediante la inclusión de un dominio sobre resolución de problemas. La evaluación PISA destaca la maestría en los procesos, la comprensión de conceptos y la habilidad para actuar en distintas situaciones dentro de cada dominio (Rico, 2005b).

El estudio PISA no se vincula con un currículo singular sostenido por un programa, pero sí se enmarca en una estructura curricular precisa, coherente en las distintas áreas. El estudio matemático de PISA se sustenta sobre un marco curricular, toma posición y da respuesta a los interrogantes básicos de cualquier plan de formación:

- ¿Por qué enseñar matemáticas?
- ¿Qué matemáticas enseñar?
- ¿Cómo enseñar matemáticas?

En conjunto, el marco curricular de PISA justifica el proceso de evaluación establecido y contribuye a interpretar sus resultados.

La pregunta *¿Por qué enseñamos matemáticas?* se refiere, en cada caso, a la clave que sostiene el sistema de la educación matemática y señala los problemas que afectan a la transmisión de la cultura matemática a las nuevas generaciones en cada país. Se trata de una tarea que realizan miles de personas en el mundo, que organizan la docencia y dirigen la formación que se transmite a millones de niños y jóvenes. Los fines prioritarios que cada sociedad establece para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son determinantes de su nivel cultural y científico; muestran aspectos de su desarrollo económico y social y determinan su calidad. Muchos investigadores han estudiado y establecido diversas categorías de finalidades para la enseñanza de las matemáticas en el periodo de la educación obligatoria (Romberg, 1991; Niss, 1995).

La evaluación PISA declara su finalidad, cuando establece su foco en «conocer cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido» (OCDE, 2004b). El estudio PISA considera que el fin prioritario de la enseñanza de las matemáticas consiste en desarrollar la competencia matemática de los escolares. La funcionalidad del conocimiento matemático, su potencialidad para dar respuesta a problemas y cuestiones, la competencia de los ciudadanos en el uso cotidiano, social y técnico es la finalidad que PISA considera y estudia.

PISA proporciona también respuesta propia a la cuestión *¿Qué matemáticas enseñar?* De manera coherente con sus fines, PISA destaca las matemáticas como herramientas, susceptibles de una pluralidad de significados según el contexto de uso y según su modo de representación. Las ideas, estructuras y conceptos mate-

máticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social y mental. Procesos tales como pensar y razonar mediante conceptos matemáticos, argumentar y justificar, usar el lenguaje simbólico y formal para abstraer relaciones e inferir resultados se sustentan en la consideración funcional de los contenidos matemáticos (OCDE, 2003).

Los conocimientos y destrezas evaluados no proceden, prioritariamente, del núcleo común de los currículos nacionales, sino de aquéllo que los expertos juzgan esencial para la vida adulta. Se considera que ésta es una característica importante del proyecto PISA/OCDE, ya destacada en los trabajos de Freudenthal (1973).

El currículo tradicional se construye mediante piezas de información y técnicas que hay que dominar; este currículo enfatiza escasamente las destrezas que se desarrollan en cada dominio y su uso en la vida adulta. Además, da menor importancia a las competencias generales para resolver problemas y aplicar ideas para la comprensión de situaciones cotidianas. Por el contrario, el proyecto PISA/OCDE no excluye el currículo basado en el conocimiento, pero lo valora en términos de la adquisición de conceptos y destrezas amplios, que pueden aplicarse en una diversidad de situaciones.

Igualmente, la cuestión *¿Cómo enseñar matemáticas?* queda satisfecha cuando las tareas de evaluación propuestas se fundamentan en los procesos de modelización y resolución de problemas, presentados bajo el epígrafe común de matematización. El marco curricular del estudio OCDE/PISA se sostiene en la creencia de que aprender a *matematizar* debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. La actividad matemática se concreta en la actividad de matematización, que se identifica en el proyecto con la resolución de problemas (OCDE, 2004a; Rico, 2005b).

Esta consideración es heredera de una importante tradición, que ha distinguido distintas fases en el proceso de resolución de problemas (Dewey, 1933; Polya, 1945). En esta misma tradición, los responsables del estudio PISA de matemáticas (OCDE, 2003; OCDE, 2004a) caracterizan la actividad de hacer matemáticas mediante cinco fases:

- Comenzar con un problema situado en la realidad.
- Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.
- Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
- Resolver el problema.
- Proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial.

La secuencia de estas fases caracteriza, en sentido amplio, la metodología de enseñanza de las matemáticas; es así como los matemáticos hacen matemáticas y las personas emplean las matemáticas en variedad de profesiones y trabajos (Pajares y cols., 2004).

## MODELO FUNCIONAL

La consideración de las matemáticas como «modo de hacer» y la noción de alfabetización responden, como se ha dicho, a un modelo funcional sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que llamamos matemáticas escolares; este modelo postula que cuando el sujeto tratar de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes (Rico y cols., 1997).

El marco curricular de PISA centra la evaluación en unas tareas, que proponen interrogantes a los que hay que dar respuesta mediante el uso de herramientas matemáticas; igualmente plantean la necesidad de que los alumnos actúen y lleven a cabo unos determinados procesos.

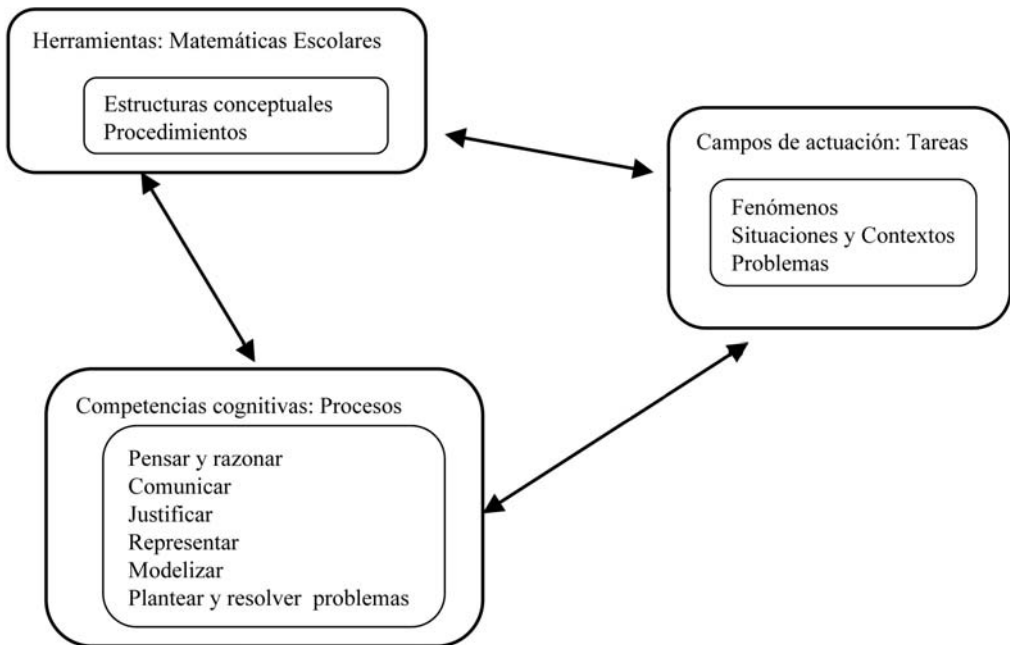
El modelo funcional sobre aprendizaje de las matemáticas postula:

- Unas tareas contextualizadas.
- Unas herramientas conceptuales.
- Un sujeto cognitivo.

Cuando el sujeto tratar de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los correspondientes procesos cognitivos:

FIGURA I

*Modelo funcional para las matemáticas escolares*



El término «alfabetización» se elige para subrayar el carácter funcional sobre el que se sustenta el marco curricular de PISA. El conocimiento matemático y las destrezas, tal como están definidos en el currículo tradicional de matemáticas, no constituyen el foco principal de este marco curricular. Por el contrario, el énfasis está en el conocimiento matemático puesto en funcionamiento ante una multitud de tareas y en una variedad de contextos diferentes, por medios reflexivos, variados y basados en la intuición personal, es decir, en competencias y capacidades personales, sostenidas por una variedad de procesos cognitivos (Rico, 2005c).

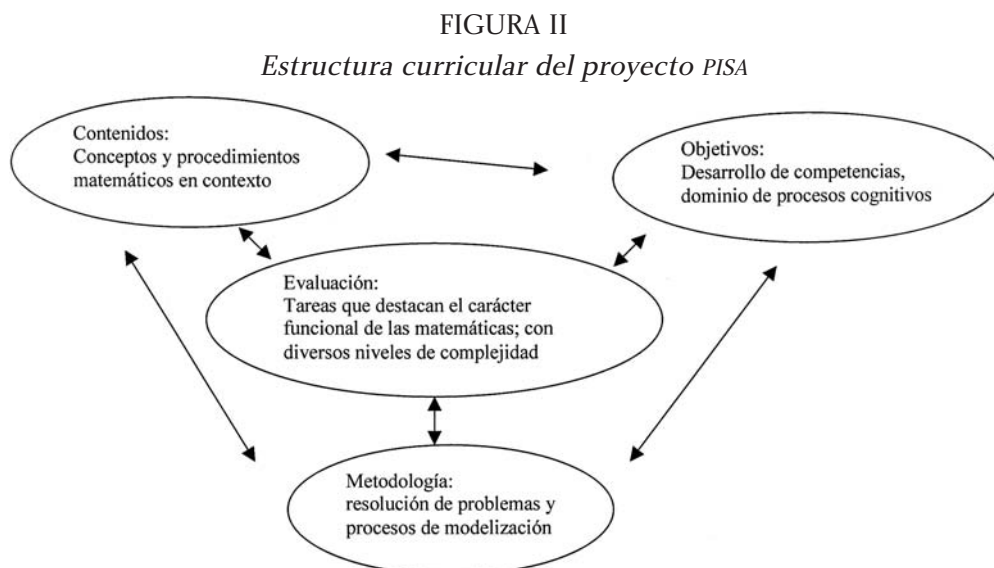
Por supuesto, y así se reconoce, para que este uso sea posible y viable, son necesarios una buena cantidad de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas; tales conocimientos y destrezas forman parte de esta definición de alfabetización.

Resulta evidente que PISA se sustenta en un marco curricular propio, ya que ofrece respuesta e interpretación a las cuestiones:

- ¿Por qué enseñar matemáticas?
- ¿Qué matemática enseñar?
- ¿Cómo enseñar matemáticas?
- ¿Cómo reconocer el aprendizaje matemático?

Si bien el modelo funcional no aparece explícitamente en el proyecto, queda claro que la noción de alfabetización matemática tiene aquí una interpretación precisa, en términos del modelo funcional de currículo presentado.

El marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas presenta una estructura curricular, que aquí se resume y esquematiza:



Seguidamente revisamos desde esta óptica curricular el tratamiento que hace PISA.

## COMPETENCIAS Y OBJETIVOS

La noción de competencia es central en el estudio PISA, hace referencia al objeto de la evaluación. Esta noción se utiliza en distintos momentos, con distintos usos e interpretaciones, y responde al modelo funcional de las matemáticas escolares.

El dominio sobre matemáticas que se estudia en el proyecto PISA 2003 se conoce como «Alfabetización Matemática» (*Mathematical Literacy*), también como «Competencia Matemática». Este dominio se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (OCDE, 2005b).

En los sucesivos documentos se produce un deslizamiento de términos, desde los primeros a los últimos informes, que comienzan por destacar la *Alfabetización* y concluyen con un mayor uso del término *Competencia Matemática*. Esta noción de competencia hace una apuesta por las matemáticas como un proceso que proporciona respuestas a problemas. La concepción de las matemáticas en que se sustenta considera que éstas consisten primordialmente en tareas de encontrar? –*προβλήματα*–, con mayor fuerza que en tareas de probar? –*προβλήματα*–, Rico, 2005b).

El foco de la evaluación PISA 2003 se centra, pues, en *cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido*.

Alfabetización o competencia matemática general es un constructo que sirve para caracterizar la actuación global del sujeto dentro del modelo funcional postulado para las matemáticas escolares. El dominio de evaluación es la competencia o alfabetización matemática del estudiante, entendido con este significado general. El concepto que utiliza PISA es mucho más amplio que la idea tradicional de alfabetización, se considera como algo continuo no como un valor dicotómico que se presenta o no se presenta (OCDE, 2005b). La alfabetización o competencia matemática se presenta como finalidad general en la formación de los estudiantes de matemáticas, y establece las prioridades en el estudio PISA.

Un segundo significado del término –*competencias*– se refiere a los *procesos* que deben activarse para conectar el mundo real, donde surgen los problemas con las matemáticas y resolver entonces la cuestión planteada, lo cual permite concretar el significado general mediante diversos tipos de capacidades de análisis, razonamiento y comunicación que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Las competencias o procesos establecen los distintos valores de la tercera dimensión del modelo funcional, aquélla que afecta a los modos en que el sujeto se enfrenta a un problema. En un caso el foco de atención está en los propios procesos, mientras que en el otro parece destacarse el sujeto que los pone en práctica (Rico, 2005c).



El proyecto PISA considera que para la resolución de los problemas que se presentan en las tareas de evaluación, los estudiantes deben poner en práctica un conjunto de procesos, es decir, mostrar su dominio en un conjunto de competencias matemáticas generales. Las competencias o procesos establecen los distintos valores de la tercera dimensión del modelo funcional, aquélla que afecta a los modos en que el sujeto se enfrenta a un problema y, por tanto, muestra el rendimiento del estudiante.

Las competencias que establece un plan de formación se constituyen en elementos determinantes para establecer su calidad y permiten llevar a cabo su evaluación. La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran a medio y largo plazo. El proyecto PISA enfatiza que la educación debe centrarse en la adquisición de unas competencias generales determinadas por parte de los alumnos de 15 años al término del período de su educación obligatoria, competencias que tienen por finalidad formar ciudadanos alfabetizados matemáticamente (INECSE, 2004a).

Las competencias o procesos generales elegidos por el proyecto PISA (OCDE, 2004b, p. 40) son:

- Pensar y razonar.
- Argumentar.
- Comunicar.
- Modelizar.
- Plantear y resolver problemas.
- Representar.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

Las competencias expresan los modos en que los estudiantes deben actuar cuando hacen matemáticas, es decir, los procesos a cuyo dominio debe estar orientada la formación. Estas competencias o procesos son objetivos generales a largo plazo de esa formación.

Los objetivos específicos, expresados en términos de capacidades o de dominio de determinados conceptos o procedimientos, se orientan hacia la consecución de una o varias competencias; son expresión de las prioridades formativas que proponen para un determinado momento. Las competencias generales o procesos, por el contrario, marcan metas a medio y largo plazo, responden a ciclos formativos más amplios y comprensivos.

Las distintas competencias se presentan detalladamente en el informe por medio de algunos descriptores que permiten identificar los dominios cognitivos que las caracterizan (OCDE, 2003; OCDE, 2004b).

Las competencias o procesos dan concreción a la competencia global o alfabetización matemática inicialmente descrita. Se centra así la evaluación del sistema educativo en el estudiante, en su aprendizaje y en su significado

funcional, que se expresa mediante capacidades mostradas sobre unas competencias enunciadas (OCDE, 2005b).

## CONTENIDOS Y MATEMÁTICAS ESCOLARES

La hipótesis de que las ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social y mental, es central en el modelo funcional de las matemáticas escolares. El sistema educativo organiza y estructura dichos conceptos e ideas a los efectos de su enseñanza, y contribuye a que los ciudadanos que se encuentran en período de formación lleven a cabo su aprendizaje. Dicho aprendizaje se hace efectivo mediante el desarrollo de las capacidades y competencias antes mencionadas.

Las matemáticas son un modelo paradigmático de proporcionar significado a relaciones y expresiones abstractas, que no corresponden a objetos o propiedades físicas, pero que satisfacen un marco de experiencias estructuradas, relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar, situar, representar, medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar (Devlin, 1994; Steen, 1990).

Los términos y conceptos matemáticos por cuyo significado nos interesamos son los de la matemática escolar. Por tanto, los términos que se usan y los conceptos que representan corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes, que se transmiten por el sistema educativo para la formación de todos sus ciudadanos.

Las conexiones internas refuerzan el lenguaje matemático, proporcionan sentido a cada noción por medio de sus vínculos con la estructura conceptual en la que el concepto expresado se inserta y le proporcionan objetividad y potencial argumentativo. Las conexiones externas aportan referentes basados en la experiencia propia o en la experiencia culturalmente acumulada; incorporan modos de actuar ante situaciones, abordar problemas, procesar información y ajustarse a modelos.

En el ámbito escolar, un concepto matemático puede mirarse desde una variedad de significados. Afirmamos que esto es así porque un mismo concepto admite una pluralidad de sentidos, que vienen determinados por las relaciones internas y por las externas del concepto de referencia.

Basándonos en las ideas de sentido y referencia de Frege (1996), sostenemos que los diferentes significados de un concepto matemático vienen dados por las estructuras conceptuales en que se inserta, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido. La terna de Frege Signo-Sentido-Referencia, para caracterizar el *significado* de un concepto matemático la adecuamos para las matemáticas escolares. En esta reflexión sobre contenidos, que corresponde al estudio curricular, el *significado* de un concepto matemático escolar se establece mediante la terna Representación-Fenómeno-Definición.

No resulta difícil asumir que hay una multiplicidad de significados para un mismo concepto matemático, ya que hay diversos sistemas de signos para su representación e, igualmente, hay diversos objetos (fenómenos) que refieren y dan distintos sentidos a un mismo concepto. Por eso es factible entender que hay una pluralidad de significados para un mismo concepto matemático. Determinar los significados más relevantes de cada concepto es uno de los retos de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, tarea que han de llevar a cabo los profesores para transmitir a los estudiantes los significados cultural y científicamente prioritarios. Entender diferentes significados de un mismo concepto proporciona su comprensión (Rico, 1997).

Las matemáticas, como todas las disciplinas, tienen una tradición en el modo de organizar sus contenidos, que se han discutido y construido a lo largo de la historia. Sostenidas por una tradición de más de 200 años las escuelas organizan el currículo de matemáticas mediante contenidos temáticos: aritmética, geometría, álgebra, y otros. Estos tópicos reflejan ramas bien establecidas del pensamiento matemático y facilitan el desarrollo estructurado de un programa. Cuando se hace así la prioridad está en la estructura conceptual. Los currícula escolares no se organizan a partir de los fenómenos, ya que los objetos y fenómenos del mundo real que llevan a un tratamiento matemático no están organizados lógicamente.

No obstante, en el modelo funcional que hemos presentado, el interés se centra sobre los fenómenos del mundo real que llevan a un tratamiento matemático. Al modelo funcional no le interesa tanto una clasificación convencional de las herramientas, es decir, la organización de los contenidos, cuanto destacar las herramientas por su funcionalidad, teniendo en cuenta los usos en que se ven implicadas.

La estrategia asumida en el proyecto PISA/OCDE trata de equilibrar la prioridad estructural en la organización de los contenidos, para ello se propone definir el rango del contenido que puede evaluarse haciendo uso de una aproximación fenomenológica para describir las ideas, estructuras y conceptos matemáticos. Esto significa describir el contenido en relación con los fenómenos y los tipos de problemas de los que surgieron, es decir, organizar los contenidos atendiendo a grandes áreas temáticas (Freudenthal, 1973).

## ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Las ideas fundamentales adoptadas por PISA, que satisfacen las condiciones de respetar el desarrollo histórico, cubrir el dominio y contribuir a la reflexión de las líneas principales del currículo escolar, son:

- Cantidad.
- Espacio y forma.
- Cambios y relaciones.
- Incertidumbre.

Con estas cuatro categorías el contenido se organiza en un número de áreas suficiente, que aseguran que las tareas utilizadas para la evaluación tienen una distribución suficiente a lo largo del currículo, pero al mismo tiempo en un número no muy amplio que evite una división excesiva. Las cuatro áreas establecen los valores considerados para la variable contenido, que es una de las que identifican las tareas y determinan la evaluación PISA (OCDE, 2003).

### SITUACIONES Y CONTEXTOS QUE CARACTERIZAN LAS TAREAS

Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la alfabetización o competencia matemática. Se reconoce que trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático, a la elección de métodos matemáticos y a la organización por medio de representaciones, depende frecuentemente de las situaciones en las cuales se presentan los problemas. La evaluación se lleva a cabo mediante una serie de tareas escritas diferentes que se presentan a los alumnos. El material muestra distintas situaciones verosímiles sobre las que se articulan uno o varios ítems. En las tareas de la evaluación PISA se considera la situación, que contextualiza y dota de significado a la tarea propuesta (INECSE, 2005).

La situación es la parte del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea. El estudio PISA ha considerado cuatro tipos de situaciones:

- Personales.
- Educativas o laborales.
- Públicas.
- Científicas.

Es decir, la variable situación toma cuatro valores, que se identifican en la presentación de los ítems propuestos. Las situaciones permiten establecer la localización de un problema en términos de los fenómenos de los que surge la situación problemática considerada (OCDE, 2004b).

La aproximación fenomenológica y los contextos y situaciones donde se plantean los problemas constituyen los ejes centrales que dotan de sentido al conocimiento matemático en PISA. Esta prioridad se basa en la consideración funcional de las matemáticas escolares, que destaca la importancia de conceptos y procedimientos matemáticos como herramientas para dar solución a problemas.

### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TRATAMIENTO METODOLÓGICO

El modelo funcional postulado en la evaluación PISA establece que los sujetos abordan distintas cuestiones y plantean y resuelven problemas mediante herramientas matemáticas. Las matemáticas que evalúa y considera PISA se centran en tareas matemáticas de encontrar, con preferencia a las tareas de probar. La metodología elegida está centrada, pues, en la resolución de problemas y se le llama matematisación. La actividad de matematisación consiste en la resolución de problemas.

En el marco teórico de PISA el proceso de hacer matemáticas, que se conoce como matemización implica, en primer lugar, traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Esta primera fase se conoce como *matematización horizontal*. La matemización horizontal se sustenta sobre actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.

Una vez traducido el problema a una expresión matemática el proceso puede continuar. El estudiante puede plantear a continuación cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas. Esta fase del proceso se denomina *matematización vertical*. La matemización vertical incluye:

- Utilizar diferentes representaciones.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos.
- Argumentar y Generalizar.

La fase posterior en la resolución de un problema implica reflexionar sobre el proceso completo de matemización y sus resultados. Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo. Algunos aspectos de esta fase de *validación y reflexión* son:

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución.
- Criticar el modelo y sus límites.

Los modos de actuación de los sujetos, requeridos en cada una de las fases, muestran sus capacidades y habilidades cuando trabajan con las matemáticas en contextos en los que es necesario utilizar este tipo de herramientas (OCDE, 2003).

El proceso de matemización descrito formaliza la metodología de resolución de problemas. Su utilidad se concreta en establecer capacidades y habilidades específicas que ayudan a modular los objetivos, a establecer tareas escolares y caracterizar las propuestas de trabajo y las evaluaciones. Las capacidades y habilidades puestas en juego muestran que una persona es competente en matemáticas,

son expresión de su competencia matemática. Los objetivos de aprendizaje expresan de manera concreta las habilidades que se necesitan para un determinado tema y en un determinado momento (Pajares, Sanz y Rico, 2004).

## INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

El objetivo de la evaluación PISA consiste en medir hasta qué punto los alumnos a los que se les presentan problemas pueden activar sus conocimientos y competencias matemáticas para resolverlos con éxito. El programa OCDE/PISA se enfrenta a un problema operativo que consiste en evaluar si los estudiantes de 15 años están debidamente alfabetizados y han desarrollado eficazmente su capacidad de manejar las matemáticas de manera fundada cuando se enfrentan con problemas del mundo real.

Los responsables del estudio reconocen la dificultad de llevar esto a cabo mediante una simple prueba escrita de evaluación ya que el proceso completo de actuación desde la realidad a las matemáticas, y vuelta a la realidad, implica con frecuencia trabajo en colaboración y búsqueda de recursos; el proceso completo toma un tiempo considerable.

Debido a estas limitaciones el programa OCDE/PISA ha elegido preparar un conjunto de ítems que evalúen diferentes partes de este proceso. Cada uno de estos ítems, o grupo de ellos, propone una tarea vinculada a un contexto y que puede tratarse como un problema matemático (OCDE, 2005b; Rico, 2004).

La estrategia escogida para contemplar el proceso de matematización y atender al dominio que se evalúa tiene en cuenta tres variables. Las tres variables, que establecen la tarea y caracterizan aquello que se evalúa, son:

- El *contenido matemático* que se debe utilizar para resolver el problema.
- El *problema contextualizado*.
- Las *competencias* o *procesos* que deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas y resolver la cuestión planteada.

Estas tres variables corresponden a los tres componentes del modelo funcional antes descrito, en el cual un sujeto aborda unas tareas mediante las herramientas disponibles y, para ello, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de unos procesos determinados. Los contenidos muestran el modo en que se organizan las herramientas conceptuales; las tareas son problemas del mundo real, que se ubican en distintos contextos y proceden de diversas situaciones. Los diferentes procesos que llevan a cabo los sujetos ponen de manifiesto distintas competencias.

En el momento de seleccionar las tareas para diseñar los instrumentos de evaluación resulta factible clasificar éstas por el contenido que tratan y también por la situación en la que se presentan y el contexto al que se refieren. Tanto el contenido como la situación son variables de tarea, cuya identificación y selección no plantea dificultad especial, como puede verse en los ejemplos publicados por

el Ministerio de Educación y Ciencia (INECSE, 2005). Sin embargo, es difícil establecer con carácter previo cuál o cuáles procesos va a activar un alumno para dar respuesta a la cuestión o cuestiones planteadas. Las competencias no son variables de tarea sino variables del sujeto y, por ello, no es posible establecer a priori a cuál de los procesos elegidos corresponde asignar una tarea determinada; por lo general, será posible vincular una tarea con diversos procesos puesto que los sujetos que la resuelven lo pueden hacer de distintas maneras.

La estrategia seguida en el proyecto PISA/OCDE considera tres niveles de complejidad en los ítems propuestos respecto de las competencias generales requeridas. El Informe habla de *grupos de competencias*, y en este caso se distinguen estos grupos por las demandas cognitivas implicadas en las tareas que los ejemplifican.

De este modo se incluye una nueva variable de tarea, útil para evaluar las competencias, que ha mostrado su adecuación para analizar el modo en que las distintas competencias son requeridas como respuesta a los distintos tipos y niveles de demandas cognitivas planteados por los diferentes problemas matemáticos (OCDE, 2004).

Cada una de las tareas enunciadas admite tipos diferentes de complejidad, lo cual afecta al modo en que deben ejecutarse los correspondientes procesos. Dichas clases de complejidad para las tareas son:

- *Primera clase*: Reproducción y procedimientos rutinarios.
- *Segunda clase*: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
- *Tercera clase*: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Los indicadores para las tareas que se incluyen en cada una de las categorías se resumen en la siguiente tabla (Lupiáñez, 2005).

TABLA I  
*Indicadores que caracterizan las tareas según categorías*

REPRODUCCIÓN	CONEXIÓN	REFLEXIÓN
- Contextos familiares - Conocimientos ya practicados - Aplicación de algoritmos estándar - Realización de operaciones sencillas - Uso de fórmulas elementales	- Contextos menos familiares - Interpretar y explicar - Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación - Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	- Tareas que requieren comprensión y reflexión - Creatividad - Ejemplificación y uso de conceptos - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos - Generalizar y justificar resultados obtenidos

El estudio de los instrumentos de evaluación y la delimitación de las variables de tarea lleva a los responsables del estudio PISA/OCDE a contemplar la complejidad como una categorización de las tareas, que hace relación a la noción de competencia. El requerimiento de procesos más complejos, creativos o estructurados delimita distintos tipos de competencias en los estudiantes que, en principio, se concretan en esas tres clases. Alumnos más competentes llevaron a cabo procesos de mayor complejidad; alumnos menos competentes sólo trabajaron procesos de complejidad menor. En este caso la competencia de los estudiantes se refiere a las capacidades individualmente desarrolladas, que se ponen de manifiesto por el tipo de tareas abordadas con éxito.

## RESULTADOS EMPÍRICOS

El marco teórico tiene una importante validación empírica, resultado del análisis de los datos de la aplicación de las pruebas en 2003. Las respuestas de los sujetos a tareas con distintos niveles de complejidad permiten establecer niveles de competencia entre los estudiantes, en todo caso con las herramientas y situaciones consideradas. Esto se confirma con el escalamiento que se produce en las respuestas de los estudiantes ya que alumnos que resuelven problemas de mayor complejidad también responden a los problemas de complejidad inferior. Los datos empíricos muestran mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías. Los mejores alumnos muestran en su actividad distintos niveles de dominio en la ejecución de las tareas. De este modo se determinan empíricamente seis niveles de competencia, que admiten una descripción general y también una descripción más detallada por cada uno de los campos de contenido (Rico, 2005c). La siguiente tabla resume los descriptores principales de cada uno de los seis niveles encontrados empíricamente, atendiendo a los procesos o competencias cognitivas postulados (Lupiáñez, 2005).

Cada nivel de competencia se caracteriza por los procesos empleados y por el grado de complejidad con que los alumnos los ejecutan al abordar tareas de dificultad creciente. De este modo es posible entender cada nivel de competencia matemática en relación con la maestría con que el alumno lleva a cabo las tareas matemáticas propuestas, es decir, muestra su competencia matemática (OCDE, 2004). En este caso se habla de las competencias como nivel alcanzado por los alumnos, que se determina empíricamente y se expresa en una escala. La distribución de los alumnos de cada país en cada uno de los niveles de competencias matemáticas consideradas, ayudan a establecer el nivel y modo de alfabetización matemática de los estudiantes de ese país. También muestra las disparidades y desigualdades internas dentro de cada población, que proporciona indicadores sobre la equidad e igualdad de oportunidades en cada caso.

## CONCLUSIÓN

Hemos presentado una interpretación del marco teórico de la evaluación PISA 2003 en matemáticas y resolución de problemas en términos curriculares.



TABLA II

*Descriptores que caracterizan los distintos niveles de competencias*

NIVELES COMPE- TENCIAS	1	2	3	4	5	6
<b>Pensar y Razonar</b>	Responder a cuestiones en contextos muy conocidos		Responder a cuestiones en contextos poco familiares		Responder a cuestiones complejas en multitud de contextos	Formar y relacionar conceptos
<b>Argumentar y Justificar</b>				Elaborar argumentos basados en sus acciones	Formular los razonamientos desarrollados	Elaborar argumentos desde su propia reflexión
<b>Comunicar</b>		Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas		Comunicar conclusiones con precisión	
<b>Modelizar</b>				Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones	
<b>Resolución de problemas</b>	Resolver problemas con datos sencillos		Seleccionar y aplicar estrategias sencillas		Seleccionar, comparar y evaluar estrategias	Generalizar resultados de problemas
<b>Representar</b>	Leer datos directamente de tablas o figuras	Usar un único tipo de representación	Conocer y usar diferentes Sistemas de Representación	Vincular diferentes Sistemas de Representación incluyendo el simbólico		Relacionar y traducir con fluidez diferentes Sistemas de Representación
<b>Lenguaje simbólico</b>	Realizar operaciones básicas	Usar algoritmos y fórmulas elementales	Aplicar procedimientos descritos con claridad	Representar situaciones reales por símbolos		Dominar con rigor el lenguaje simbólico

Hemos argumentado que la noción de competencia, hilo central del estudio PISA 2003, establece un planteamiento funcional cuando movilizan ciertos procesos cognitivos mediante el uso de herramientas matemáticas, para resolver problemas que se proponen por medio de tareas contextualizadas. Esta articulación teórica tiene una lectura en términos de objetivos (competencias), contenidos (matemáticas escolares), metodología (matematización) y evaluación (tareas contextualizadas), cuya coherencia aquí se presenta y valora. La discusión lleva a plantear la cuestión del significado de los conceptos matemáticos escolares, y otras como la caracterización de los niveles de complejidad que pueden establecerse teóricamente para las tareas matemáticas.

La validación empírica del modelo de evaluación, estableciendo los diversos niveles de competencias, que se caracterizan por la complejidad de los procesos cognitivos manifestados, avala la solidez y muestra la coherencia del estudio PISA aquí abordado.

Los significados distintos considerados sobre la noción de competencia en el *Informe PISA*, ponen de manifiesto la riqueza y diversidad de matices con que se trabaja y el interés que tienen para su correcta interpretación. Las diferentes funciones que hemos destacado para esta noción han sido:

- Expresar una finalidad prioritaria en la enseñanza de las matemáticas.
- Expresar un conjunto de procesos cognitivos generales que caracterizan un esquema pragmático de entender el hacer matemáticas.
- Concretar variables de tarea para los ítems en la evaluación; destaca por los grados de complejidad.
- Marcar niveles de dominio en las tareas de hacer matemáticas.

Finalmente, queremos subrayar que los datos y resultados de la evaluación PISA 2003 hay que relacionarlos con el marco curricular en que se sustenta. Toda valoración sobre los resultados específicos de un país, comunidad, sistema educativo o centro hay que interpretarlos en términos de la mayor o menor coincidencia de su currículo con el que sostiene el proyecto PISA.

Los resultados de PISA no evalúan a alumnos ni a profesores, éstos simplemente son los informantes a los que recurre la OCDE para evaluar el rendimiento del sistema educativo de cada uno de los países participantes. Los datos finales hay que interpretarlos en cada caso en términos de su coincidencia con los resultados y rendimientos esperados para un currículo basado en una concepción funcional de las matemáticas escolares.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DEVLIN, K. (1994): *Mathematics: The Science of Patterns*. New York, Scientific American Library.
- DEWEY, J. (1933): *How we think?* Lexington, MA, Heath and Company.
- FREGE, G. (1996): *Escritos filosóficos*. Barcelona, Crítica.
- FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Reídle.
- INECSE (2004a): *Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA 2003*. Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.
- (2004b): *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.
- (2005): *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.
- LUPIÁÑEZ, J. L.: *Análisis Cognitivo*. Granada, Universidad de Granada (pendiente de publicación).
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Básico. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid, MEC.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA, NCTM.
- NISS, M. (1995): «Why do we teach Mathematics in School?», en L. PUIG, J. CALDERÓN (ed.): *Seminario de Investigación y Didáctica de la Matemática*. Madrid, CIDE.
- OCDE: *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, OCDE.
- (2004a): *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid, INECSE.
- (2004b): *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París, OECD.
- (2005c): *Organisation for Economic Co-operation and Development*. <http://www.oecd.org/home> (Consulta: 20-06-2005).
- (2005b): *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid, Santillana.
- PAJARES, R.; SANZ, A.; RICO, L. (2004): *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- POLYA, G. (1945): *How to solve it*. Princenton, University Press.
- RICO, L. (1997): «Organizadores del Currículo de Matemáticas», en L. RICO (coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona, Horsori.
- (2004) «Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003», en E. CASTRO, E. DE LA TORRE (ed.): *Actas VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña, Universidad de A Coruña.
- «La Alfabetización Matemática y el Proyecto PISA de la OCDE», en *Padres y Madres de Alumnos Revista de la CEAPA*, 82, pp. 7-13.

- (2005b): «Competencias Matemáticas e Instrumentos de Evaluación en el Proyecto PISA 2003», en *PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de solución de Problemas*. Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.
  - (2005c): «La Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA», en *Actas VI Seminario de Primavera*. Madrid, Fundación Santillana.
- RICO, L.; CASTRO, E.; CASTRO, E.; CORIAT, M.; SEGOVIA, I. (1997): «Investigación, diseño y desarrollo curricular», en L. RICO (ed.): *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid, Síntesis.
- ROMBERG, T. (1991): «Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas», en *Revista de Educación*, 294, pp. 323-406.
- STEEN, L. (ed.) (1990): *On the shoulders of Giants*. Washington DC, National Academy Press.